A·N·A·E

APPROCHE NEUROPSYCHOLOGIQUE DES APPRENTISSAGES CHEZ L'ENFANT

Revue fondée en 1989

N° 180

Apprentissage des mathématiques : mieux comprendre les difficultés pour mieux intervenir

Dossier coordonné par K. Mazens

Laboratoire de Psychologie et Neurocognition (CNRS UMR 5105) – Université de Grenoble

ISSN 0999-792X

N° 180 - Octobre 2022 - Volume 34 - Tome V

PAGES 537 à 660

A.N.A.E. ◆ 2022 - 180 - 629-638

Effets d'une séquence d'apprentissage innovante en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux « AIR2 » chez les élèves de CM1 en France

C. Rivier[1], E. Sander[2]

1. Chargée d'enseignement à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'éducation de l'Université de Genève, Suisse.
2. Professeur ordinaire à la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'éducation de l'Université de Genève, Suisse.
catherine.rivier@unige.ch

Conflits d'intérêts : les auteurs déclarent n'avoir aucun conflit d'intérêt.

RÉSUMÉ : Effets d'une séquence d'apprentissage innovante en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux « AIR2 » chez les élèves de CM1 en France

Nous présentons dans cet article les effets d'une séquence d'apprentissage innovante en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux « AIR2 » (Analogies Intuitives, Recodage sémantique et Résolution de problèmes) chez des élèves de CM1 en France. Nos résultats montrent que les élèves de CM1 obtiennent à l'épreuve finale des performances équivalentes à celles des élèves de CM2 à l'épreuve initiale pour les problèmes d'addition, de soustraction et de multiplication. Ces résultats ouvrent ainsi une piste prometteuse pour l'enseignement des concepts arithmétiques à l'école élémentaire.

Mots clés : *Mathématiques – Résolution de problèmes – Recodage sémantique – Conceptions intuitives.*

SUMMARY: *Effects of an innovative learning sequence in arithmetic problem solving skills with French "AIR2" verbal statements (Intuitive Analogies, Semantic Recoding and Problem Solving) in grade fourth students in France*

In this paper, the effects of an innovative learning sequence in arithmetic problem solving skills with "AIR2/(Intuitive Analogies, Semantic Recoding and Problem Solving)" verbal statements in grade fourth students (elementary school) in France, are presented. Results from these studies show that performance levels of grade fourth students on the final test are equivalent to those of grade fifth students on the initial test for addition, subtraction and multiplication problems. These results offer a promising avenue for teaching arithmetic concepts in primary schools.

Key words: *Mathematics - Problem solving - Semantic recoding - Intuitive conceptions.*

RESUMEN: *Efectos de una secuencia didáctica innovadora en la resolución de problemas aritméticos con enunciados verbales "AIR2" en alumnos de cuarto grado de primaria en Francia*

En este artículo, presentamos los efectos de una secuencia didáctica innovadora en la resolución de problemas aritméticos con enunciados verbales "AIR2" (Analogías Intuitivas, Recodificación Semántica y Resolución de Problemas) en alumnos de cuarto grado de primaria en Francia. Nuestros resultados muestran que los alumnos de cuarto grado obtienen el mismo rendimiento en la prueba final que los de quinto grado en la prueba inicial para los problemas de suma, resta y multiplicación. Estos resultados abren una vía prometedora para la enseñanza de los conceptos aritméticos en la escuela primaria.

Palabras clave: *Matemáticas – Resolución de problemas – Recodificación semántica – Concepciones intuitivas.*

Pour citer cet article : Rivier, C., & Sander, E. (2022). Effets d'une séquence d'apprentissage innovante en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux « AIR2 » chez les élèves de CM1 en France. *A.N.A.E., 180*, 629-638.

Introduction

Un des enjeux de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux est le développement de la capacité à identifier la structure abstraite d'un énoncé verbal indépendamment des facteurs extra-mathématiques. Il existe de nombreuses typologies de problèmes à énoncés verbaux psychologie et en didactique des mathématiques. Vergnaud (1982, 1988), Riley, Greeno et Heller (1983), Greer (1992) ont proposé des classifications qui visent à organiser les énoncés selon les opérations arithmétiques et le type de relation entre les entités (p. ex. : combinaison). La typologie de Vergnaud vise à catégoriser l'ensemble des énoncés selon l'opération arithmétique à mettre en œuvre pour le résoudre, la relation entre les variables présentes dans l'énoncé, et l'objet de la recherche. Riley *et al.*, en 1983, ont également proposé une typologie de problèmes additifs et soustractifs. Elle comporte plusieurs convergences avec celle de Vergnaud et est associée à la mesure de taux de réussite des élèves pour chaque énoncé et pour chaque niveau de classe pour les élèves âgés de 5 à 9 ans. Ces résultats mettent en évidence des écarts de réussite importants entre des problèmes d'une même catégorie.

Par ailleurs, selon la théorie des modèles tacites (Fischbein, 1989, 1994) ou celle des métaphores conceptuelles (Lakoff & Nuñez, 2000), les conceptions des élèves sont contraintes par leurs connaissances extra-mathématiques. Or, il est connu que les facteurs extra-mathématiques, liés aux aspects langagiers et représentationnels de la tâche influencent le processus de résolution. Ainsi, la structure mathématique d'un énoncé peut être plus ou moins difficile à identifier selon les éléments sémantiques qui le composent. Pour Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985, p. 4), « chaque opération arithmétique reste généralement attachée à un modèle intuitif, primitif, implicite et inconscient. L'identification de l'opération nécessaire pour résoudre un problème [...] n'est pas directe, mais est faite par l'intermédiaire du modèle ». Ces modèles sont utilisés de manière privilégiée dans les raisonnements mathématiques, car ils sont simples et peu coûteux. En outre, ils perdurent alors même que la notion a fait l'objet d'un enseignement (Tirosh & Graeber, 1991). À chaque opération arithmétique correspond donc une conception intuitive, directement applicable en termes d'action parce que fruit d'expériences concrètes répétées (Fischbein, 1994). Ces conceptions sont opérantes dans un ensemble considérable de situations mais peuvent aussi être obstructives hors de cet ensemble. En effet, dans le cas où l'élève élabore une représentation mentale non inappropriée par rapport à la structure mathématique de l'énoncé, il se trouve en impasse ou est conduit à l'erreur. La représentation construite par l'élève est guidée par les analogies que suscite l'énoncé. L'analogie est un mécanisme psychologique adaptatif fondé sur la référence au connu pour appréhender la nouveauté, rendant possible de comprendre une situation dans les termes d'une autre (Holyoak & Thagard, 1995). Sander (2018) identifie trois formes d'analogies intuitives constituant des facteurs d'influence dans les processus de résolution de problèmes à énoncés verbaux. S'inscrivant dans le cadre théorique A-S3 (pour Analogies de Substitution, Scénario et Simulation), ces trois types d'analogies reposent sur des connaissances extra-mathématiques des élèves construites en amont ou au cours de leur scolarisation. Ces analogies sont facilitatrices pour la résolution lorsqu'elles conduisent à des inférences pertinentes pour la résolution et obstructives dans le cas inverse. Lorsqu'elles sont obstructives, c'est-à-dire lorsqu'elles conduisent l'élève à mobiliser spontanément une conception inadéquate avec la situation de l'énoncé, elles doivent être surmontées au moyen d'une évolution de la représentation mentale initiale vers une représentation isomorphe de la situation de l'énoncé.

Trois formes d'analogies intuitives : les analogies de substitution, scénario et simulation

Une analogie de substitution se caractérise par le fait qu'une connaissance préalable de l'élève se substitue à la notion mathématique concernée. L'analogie de substitution s'inscrit ainsi dans un certain domaine de validité (Sander, 2008) au sein duquel conception intuitive et notion mathématique concordent. Lorsque c'est le cas, par exemple, pour l'énoncé « Joe a 3 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes ont-ils ensemble ? » (100 % de réussite au CP, Riley *et al.*, 1983), le recours à cette analogie engendre une inférence facilitatrice dans le processus de résolution. À l'inverse, pour un énoncé dont la situation se situe hors du domaine de validité de l'analogie (situation de discordance), le recours à la conception intuitive devient obstructif à la résolution. C'est le cas par exemple pour l'énoncé suivant : « Joe a 3 billes. Tom a 5 billes de plus que Joe. Combien Tom a-t-il de billes ? » (17 % de réussite au CP, *ibid.*). À chaque opération arithmétique correspond donc une conception intuitive, directement applicable en termes d'action parce que fruit d'expériences concrètes répétées. Ainsi l'analogie de substitution de l'addition est celle de l'ajout, de la réunion de deux parties, tandis que celle de la soustraction correspond à la recherche de la quantité subsistante dans un contexte de perte, de retrait (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000). Dès lors, le recours à ces analogies de substitution conduit à ce que des élèves se trouvent en difficulté (Riley, Greeno & Heller, 1983) lorsqu'il leur est demandé de résoudre avec une addition des problèmes où l'on ne fait que perdre (« Joe avait des billes. Il en a donné 5 à Tom. Maintenant, Joe a trois billes. Combien Joe avait-il de billes au début ? »), ou encore de résoudre avec une soustraction un problème où l'on ne fait que gagner (« Joe avait des billes. Tom lui en a donné 5. Maintenant, Joe a 8 billes. Combien Joe avait-il de billes au début ? »). L'analogie de substitution de la multiplication, est celle de l'addition réitérée tandis que celle de la division correspond à la recherche de la valeur de la part dans un contexte de partage équitable (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nuñez, 2000 ; Sander, 2008).

L'analogie de scénario repose également sur des connaissances extra-mathématiques de l'élève, comme la nature des liens entre les entités ou celle des variables en jeu dans les énoncés (Sander, 2007 pour une revue). Ainsi, Bassok, Chase et Martin (1998) ont montré que si l'on demande à des participants d'inventer des énoncés avec des entités ayant un lien de collatéralité (par exemple : des pommes et des oranges qui appartiennent à la catégorie « fruits »), ce sont très majoritairement des problèmes à structure additive qui seront proposés avec une question du type « Combien y a-t-il de fruits en tout ? ». De même, si les entités entretiennent un lien de fonctionnalité (par exemple : des pommes et des paniers), les énoncés proposés seront essentiellement à structure multiplicative avec une question du type « Quel est le nombre de pommes par panier ? ». Lorsque la structure mathématique du problème est concordante avec la nature des liens entre les entités (un lien de collatéralité pour les structures additives ou de fonctionnalité pour les structures multiplicatives), la résolution est facilitée. En revanche, en cas de discordance, comme, par exemple, dans « Combien de fois plus d'oranges que de pommes ? » (collatéralité et champ multiplicatif), la difficulté de résolution du problème s'en trouve accrue. La simple nature des variables en jeu dans un énoncé peut aussi influencer la stratégie de résolution (Gros, Thibaut & Sander, 2017). Dans le cas de problèmes de distributivité isomorphes, Scheibling-Sève, Pasquinelli et Sander (2020) ont montré que la stratégie de résolution mise en œuvre par des élèves de 9-11 ans dépendait de la variable en jeu dans l'énoncé. Ainsi, un problème avec une variable Prix comme facteur tel que « À la rentrée, Claire achète dans un magasin : des crayons à 2 € l'unité, des stylos à 7 € à l'unité et des feutres à 6 € l'unité. Elle en achète 4 de chaque sorte. Combien Claire a-t-elle dépensé en tout ? » favorise l'utilisation de la stratégie de distributivité (2 x 4 + 7 x 4 + 6 x 4) par rapport à la stratégie de factorisation. 88 % des élèves effectuent la stratégie de distributivité. Au contraire, un problème avec une variable Durée comme facteur tel que « À la rentrée, Claire achète 2 crayons, 7 stylos et 6 feutres. Elle achète cela à chaque rentrée depuis 4 ans. Combien Claire a-t-elle acheté d'objets en tout durant ces années ? » induit autant de stratégies de développement (53 %) que de factorisation (47 %). Cet effet de la variable est toujours conservé quand il est demandé explicitement aux élèves de résoudre le problème avec deux stratégies différentes. Les relations non-mathématiques mais sémantiques entre les quantités d'un problème influencent donc la résolution de celui-ci. Ces résultats mettent en évidence que l'analogie de scénario est un facteur d'influence sur les processus de résolution et que lorsque scénario et structure mathématique concordent, il n'est pas possible de déterminer, de l'un ou de l'autre, ce qui a présidé à la réussite. *A contrario*, en l'absence de cette concordance, la réussite est un indicateur favorable d'une maîtrise conceptuelle de la notion par l'élève. De plus, Gros, Sander et Thibaut (2019) ont montré que l'influence de ce facteur n'est pas circonscrite aux processus de résolution des élèves d'école primaire mais qu'il persiste au-delà de la scolarité, chez les adultes, y compris pour des experts en mathématiques.

L'analogie de simulation repose sur la capacité à résoudre par des stratégies informelles, fondées sur des simulations mentales opérant sur des situations analogues à celles décrites dans l'énoncé, des problèmes pouvant par ailleurs être résolus par des opérations arithmétiques. Lorsqu'il est possible de s'appuyer sur la simulation mentale pour parvenir à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice. Elle est obstructive lorsque la simulation n'est pas possible. Schliemann *et al.* (1998) ont ainsi montré que des adolescents de 15 ans n'ayant pas été scolarisés et pratiquant du commerce de rue résolvent avec 75 % de réussite l'énoncé « Quel est le prix de 3 objets à 50 *cruzeiros* ? », alors que leur performance chute à 0 % pour l'énoncé « Quel est le prix de 50 objets à 3 *cruzeiros* ? ». Ces deux énoncés ont le même statut facilitateur sur le plan de l'analogie de substitution (la multiplication traitée comme une addition réitérée) et sur le plan du scénario (recherche du prix d'un achat groupé) mais diffèrent grandement par leur difficulté, ce dont l'analogie de simulation permet de rendre compte. Dans le premier cas, la simulation mentale est efficiente pour aboutir à la solution (50 + 50 + 50 = 150) alors qu'elle ne l'est pas pour le second (3 + 3 + 3 +…= ?). Brissiaud et Sander (2010) ont montré que la performance pouvait ainsi varier du simple au double selon que la simulation mentale est efficiente ou non, et qu'elle constitue un facteur déterminant des performances des élèves jusqu'en classe de CE2.

La première conclusion montre un lien bien établi entre les connaissances quotidiennes et les notions mathématiques. Les analogies de substitution s'intéressent aux limites des conceptions initiales des notions mathématiques, ici celles des quatre opérations arithmétiques élémentaires. Les analogies de scénario appréhendent les contextes évoqués dans les énoncés et la nature des entités en jeu alors que les analogies de simulation impliquent les valeurs des données numériques du problème, rendant la simulation mentale efficiente ou non. Ces analogies intuitives sont présentes de manière précoce chez les individus et persistent à l'âge adulte, y compris chez les enseignant·e·s (Sander, 2008 ; Tirosh & Graeber, 1991). Les trois formes d'analogies décrites constituent donc des facteurs d'influence dans le processus cognitif de résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. Elles sont dissociables les unes des autres et analyser un énoncé selon ces trois facteurs permet de caractériser cet énoncé selon qu'il s'inscrit dans ou hors du champ de validité de chaque forme d'analogie et d'identifier la nature des difficultés qu'il présente pour les élèves.

L'identification de la nature des difficultés d'un énoncé arithmétique verbal conduit à engager un questionnement à propos des moyens dont l'élève dispose pour surmonter les obstacles que constituent les discordances entre conceptions intuitives et notion mathématique. La lecture de l'énoncé le conduisant à élaborer une représentation mentale inadéquate de la situation, il est question de soutenir la compréhension de cet énoncé et l'évolution de sa représentation initiale vers une représentation plus en phase avec la structure mathématique de l'énoncé. Le recodage sémantique a pour objectif de favoriser ce processus de changement de point de vue.

Le recodage sémantique

Le recodage sémantique consiste à adopter un autre point de vue que celui adopté intuitivement, de manière à réinterpréter la situation présentée par un énoncé. Ce qui fonde la démarche de recodage sémantique est d'accompagner l'élève à aller au-delà des situations de discordance, quel que soit le type d'analogie intuitive considérée, pour élaborer un nouveau codage qui rende accessible d'autres stratégies de résolution. Il s'agit de se décentrer du point de vue immédiat et d'en adopter un autre potentiellement plus fécond pour résoudre le problème. Par exemple, un énoncé tel que « J'ai 48 oranges réparties également entre 4 paniers » évoque un scénario de distribution équitable d'entités entre un certain nombre de contenants (« Combien y-a-t-il d'oranges par panier ? »). Cette relation fonctionnelle se trouve incarnée dans de nombreux contextes, par exemple des fleurs dans des vases, des billes dans des sacs, des vêtements dans des valises, etc. Dans ces contextes, la relation fonctionnelle évoque, du fait de l'analogie de scénario, une opération de type multiplicatif (multiplication ou division), contrairement à des contextes dans lesquels les entités sont des sous-catégories d'une même catégorie générale, tels que des oranges et des pommes, des tulipes et des roses, des billes bleues et des billes rouges, etc. Dans ce dernier cas, il y a un enjeu d'apprentissage à ce que le codage spontané, qui oriente vers un statut symétrique pour les deux entités (« Combien de fruits ? », « Combien de fleurs ? », « Combien de billes ? », etc.), puisse faire l'objet d'un recodage de même nature que la relation fonctionnelle (« Combien y-a-t-il d'oranges par pomme ? »). Un tel recodage soutient la possibilité d'envisager une structure multiplicative dans un contexte sémantique qui originellement ne s'y prête pas et constitue un chemin vers l'abstraction dans la mesure où les caractéristiques sémantiques initialement perçues cessent d'être des prérequis pour que l'élève soit en mesure d'envisager une structure multiplicative. Des énoncés peuvent être élaborés pour susciter un tel recodage : par exemple « Léa a 48 oranges et Théa a 4 pommes. Combien Théa recevra-t-elle d'oranges contre chacune de ses pommes si Léa et Théa échangent leurs fruits ? ».

Le fait d'introduire en classe des activités centrées sur le recodage sémantique peut s'avérer bénéfique. Cela a notamment été montré dans le cadre de l'enseignement des structures additives au CP (Vilette *et al.*, 2017), pour lequel des élèves ont particulièrement progressé dans la résolution d'énoncés où l'analogie de simulation était obstructive (par exemple : « J'ai 21 billes. J'en perds 19. Combien m'en reste-t-il ? »), en travaillant avec les élèves un recodage les amenant à considérer qu'une telle situation pouvait se recoder selon un scénario de type addition lacunaire, même si la perception initiale n'était pas celle-ci. Il s'agirait dans l'exemple précédent de reconnaître que si on ajoute aux 19 billes perdues celles qui restent, on trouve le nombre de billes à l'origine. De ce fait, l'élève apprend à envisager plusieurs stratégies possibles de résolution pour un même énoncé et à sélectionner la plus efficace dans un contexte donné. Dans le cas précédent, il devient possible de résoudre le problème « J'ai 21 billes. J'en perds 19. Combien m'en reste-t-il ? » en cherchant combien je dois ajouter à 19 pour trouver 21, ce qui peut se trouver aisément par simulation mentale (20 (1), 21 (2)), alors que la même tentative en tentant d'enlever 19 de 21 est bien plus coûteuse. Ainsi, selon les valeurs de l'énoncé, l'élève se trouve plus à même de recourir à la stratégie la plus efficiente. Il a ainsi été montré un progrès important dans la résolution de problèmes discordants par le recours à de tels recodages (Gvozdic & Sander, 2020). D'autres travaux auprès d'élèves de fin d'école primaire, faisant cette fois intervenir des problèmes à structure additive à plusieurs étapes, ont montré qu'à l'issue d'un enseignement construit autour d'activités de recodage, les élèves s'avéraient en mesure de résoudre avec succès par des stratégies efficientes des énoncés qui posaient des difficultés y compris à des adultes (Gamo, Sander & Richard, 2010). Un tel bénéfice a été observé également auprès d'élèves faisant partie de réseaux d'enseignement prioritaire (Gamo, Nogry & Sander, 2014).

Hypothèses

En amont de cette étude, nous avons étudié si les élèves de primaire sont principalement confrontés à des problèmes inscrits dans le champ de leurs conceptions intuitives, champ qui ne couvre qu'un nombre limité de situations, ou s'ils sont régulièrement confrontés à des problèmes leur permettant de développer les concepts arithmétiques dans toutes leurs dimensions (Rivier, Scheibling-Sève & Sander, en révision). Ainsi, nous avons analysé la distribution des énoncés verbaux que les élèves français sont amenés à résoudre au cours des trois premières années de scolarité élémentaire (6-9 ans) selon leur caractère concordant ou discordant sur le plan des trois formes d'analogies intuitives définies par Sander (2018) : analogies de substitution, de scénario et de simulation. Pour cela, nous avons choisi d'analyser les énoncés proposés par les manuels scolaires français destinés à ces degrés. Nos résultats montrent que certains types de problèmes sont sous-représentés et que la répartition des taux de discordance est hétérogène, notamment selon la forme d'analogie et l'opération arithmétique impliquée dans leur résolution (Rivier, Scheibling-Sève & Sander, en révision ; Sander, Rivier & Naud, 2022). Ces résultats suggèrent que l'introduction plus systématique de discordance constitue une piste pour exercer les élèves à résoudre des énoncés dans les situations pour lesquelles la mobilisation de la conception intuitive est inopérante pour accéder à la solution. En d'autres termes, il s'agit d'accroître les occasions de surmonter des inférences spontanées obstructives et de travailler les notions arithmétiques dans l'ensemble de leurs dimensions. Pour examiner cette hypothèse, il est nécessaire d'évaluer les effets d'une progression pédagogique intégrant une fréquence contrôlée d'énoncés de problèmes discordants sur le plan des analogies intuitives de substitution, scénario et simulation sur les performances des élèves.

Cette étude s'appuie sur l'hypothèse générale que la maîtrise des concepts arithmétiques dans les champs additifs et multiplicatifs sera favorisée par un apprentissage faisant appel à la résolution de problèmes selon une progression pédagogique intégrant à des fréquences contrôlées les huit types d'énoncés décrits par le cadre A-S3, associée à une approche didactique favorisant les activités de recodage sémantique. Nous avons élaboré une séquence d'apprentissage innovante en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux appelée « AIR2 » (Analogies Intuitives, Recodage sémantique et Résolution de problèmes) destinée, dans la présente étude, à des élèves de CM1 scolarisés en France. Cette séquence est conduite par les enseignant·e·s des classes participantes, suite à un module de formation continue animée par les chercheur·euse·s. Elle est composée de 10 séances pédagogiques proposant des énoncés de difficultés contrôlées selon qu'ils s'inscrivent dans ou hors du domaine de validité des conceptions intuitives des élèves et d'un entraînement au recodage sémantique et à la modélisation des situations. Pour mesurer les effets de cette séquence, nous avons mesuré les performances des élèves de CM1 par des pré- et post-tests. Nous faisons l'hypothèse que les résultats après apprentissage seront significativement supérieurs pour les problèmes d'addition, de soustraction et de multiplication. Nous avons ensuite comparé les résultats du post-test des élèves de CM1 aux résultats du pré-test des élèves de CM2. Nous faisons l'hypothèse que les résultats des élèves de CM1 après apprentissage AIR2 ne seront pas significativement différents des résultats au pré-test des élèves de CM2. Ainsi, l'hypothèse est que les élèves de CM1 qui ont reçu l'entraînement ne diffèrent pas des élèves de CM2 qui ont une année scolaire de plus.

Méthode

Participant·e·s

Les participant·e·s sont des enseignant·e·s d'écoles primaires publiques exerçant en France ainsi que les élèves de leur classe d'exercice. Au total, 9 enseignant·e·s ont participé à cette étude, ainsi que 81 élèves de CM1 (dont 43 filles ; âge moyen : 9,6 ans) et 83 élèves de CM2 (dont 38 filles ; âge moyen : 10,6 ans). Les classes (2 classes de CM1, 1 classe de CM2 et 6 classes à cours double) sont situées en milieu non-REP. Le recrutement des enseignant·e·s a été fait sur la base du volontariat suite à des sessions institutionnelles de présentation générale du projet AIR2. Les sessions de formation ont été conçues et conduites en collaboration avec les conseiller-ère·s pédagogiques.

Séquence d'apprentissage AIR2

La séquence d'apprentissage AIR2 a été conçue pour être conduite par les enseignant·e·s des classes engagées dans le projet. Un tel projet implique ainsi de réserver une place centrale à la formation et à l'accompagnement des praticien·ne·s. Chacune et chacun a assisté à un module de formation de 12 heures organisé en quatre sessions et se tenant avant, pendant et après le déroulement de la séquence d'apprentissage en classe. Ce module comprenait des apports théoriques sur les conceptions intuitives, sur le cadre A-S3 et le recodage sémantique en tant qu'approche didactique spécifique. Les sessions planifiées pendant le déroulement de la séquence d'apprentissage intégraient également des temps d'analyse de pratique et d'accompagnement à la mise en œuvre pédagogique des séances.

Les documents pédagogiques ont en outre été fournis aux enseignant·e·s pour la préparation et la conduite des séances avec une description des phases d'apprentissage et de recodage sémantique, soit 10 fiches de préparation pédagogique et les supports de vidéo-projection associés. Ces documents ont été préalablement travaillés et analysés lors des temps de formation. Ils présentaient l'analyse des difficultés de l'énoncé de type nouveau, les points de vigilance qui en découlaient, ainsi que des propositions de reformulation pour guider le recodage sémantique. Enfin, ont été diffusées aux enseignant·e·s des ressources pédagogiques sous la forme d'un corpus de 120 énoncés organisés en 10 livrets de 12 énoncés, différents des livrets d'épreuves initiales et finales.

Les sessions de formation ont été élaborées et animées en collaboration avec le/la conseiller·ère pédagogique. Les séances de la séquence ont été conçues en collaboration. L'objectif était de garantir les conditions les plus écologiques possible d'implémentation en élaborant un dispositif de formation compatible avec les contraintes institutionnelles et en laissant aux enseignant·e·s la responsabilité de la mise en œuvre pédagogique.

Les 10 séances de la séquence pédagogique ont été conduites en classe par les enseignant·e·s entre début janvier et mi-mars, à raison de deux séances d'apprentissage par semaine. La progression pédagogique proposée a été élaborée en référence aux compétences visées par les programmes. Elle était composée de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux de structures additive, soustractive et multiplicative, dont la solution requiert une seule étape de calcul. Les contraintes calendaires institutionnelles de cette année scolaire ne permettant pas l'implémentation d'une séquence de plus de 10 séances, nous avons été conduits à écarter de la progression pédagogique les énoncés de division, donc à renoncer à travailler le champ multiplicatif dans son ensemble et le caractère réciproque des deux opérations alors que c'est le cas pour le champ additif dans cette étude. Concernant la progression pédagogique déployée, les deux premières séances de la séquence visaient la découverte et l'appropriation d'outils de modélisation, à savoir « la boîte à nombres » et « le schéma ligne » pour les énoncés du champ additif (Fischer *et al.*, 2018 ; Vilette *et al.*, 2017). Ces schémas ont été proposés pour permettre à l'élève de tracer des représentations visuelles de la situation de l'énoncé dans l'objectif de favoriser sa compréhension des relations mathématiques des entités en jeu. Ces outils sont complémentaires, la boîte à nombres visant à soutenir la compréhension de la situation en appui sur une représentation cardinale des variables alors que le schéma-ligne présente ces variables selon une modalité ordinale. En effet, les nombres ordinaux décrivent une position numérique dans une séquence ordonnée alors que les nombres cardinaux se réfèrent au concept de quantité et désignent un nombre total d'entités (Fuson, 1988). Pour autant, la maîtrise de la notion de nombre implique la maîtrise de ses dimensions (ordinale et cardinale) ainsi que les liens qu'elles entretiennent étroitement (Gros *et al.*, 2021). Par leur complémentarité, ces outils de modélisation visent ainsi à la fois à favoriser la construction du concept de nombre sous ces deux dimensions et l'accès à la relation arithmétique que les variables entretiennent (addition ou soustraction pour les structures additives). Pour les énoncés du champ multiplicatif, l'outil de modélisation qui a été introduit est « le nombre rectangle » qui vise à soutenir la multiplication conçue non plus comme une addition itérée mais également comme un produit ou une aire. Cet outil a été privilégié car la représentation rectangle présente l'intérêt de rendre visible les propriétés de commutativité et de distributivité par rapport à l'addition de la multiplication (Sander *et al.*, 2022).

La séquence d'apprentissage était organisée en deux parties comprenant six séances visant spécifiquement le développement des compétences du champ additif suivies de quatre séances dans lesquelles étaient introduits les énoncés multiplicatifs de difficulté croissante. Les livrets d'entraînement ont été conçus pour intégrer lors de chaque séance des énoncés de type nouveau et des énoncés de types travaillés lors des séances précédentes, selon une logique de progression spiralaire. Par ailleurs, la séquence pédagogique a été conçue de manière à garantir que les différents types de discordance soient spécifiquement travaillés pour chaque opération arithmétique.

Les séances d'apprentissage présentaient une structure commune composée de quatre phases : une phase collective

1. portant sur la résolution d'un énoncé issu d'une séance précédente et repéré par l'enseignant·e comme ayant été majoritairement échoué, une phase de recherche individuelle,
2. sur un énoncé de type nouveau suivie d'une phase de mise en commun,
3. avec confrontation des stratégies de résolution observées parmi les élèves et recodage sémantique et enfin une nouvelle phase de recherche individuelle,
4. sur les 11 énoncés suivants, le document élève propose des énoncés de types travaillés lors de séances antérieures ou du même type que l'énoncé nouvellement introduit. Lors de cette activité de résolution ainsi que pour l'ensemble des séances, la consigne était donnée aux élèves de compléter dans les zones prévues à cet effet les étapes suivantes de résolution : modélisation de la situation avec le ou les schémas adaptés, écriture du calcul et d'une phrase réponse,
5. pour la cinquième phase de la séance, le choix de la modalité du *feed-back* sur l'activité de résolution des énoncés du livrets était laissé aux enseignant·e·s : correction collective ou individuelle, en fin de séance ou décalée dans le temps.

Pré- et post-tests et analyse des données

Les données recueillies étaient les réponses aux *items* des épreuves initiales et finales des élèves. Les livrets d'épreuves étaient composés d'énoncés arithmétiques à énoncés verbaux de différents types d'énoncés du cadre A-S3 pour l'addition, la soustraction et la multiplication. Chaque épreuve comprenait trois livrets de passation de difficulté similaire, composés selon le livret de 10 ou 12 énoncés, pour un total de 34 énoncés (*tableau 1*).

Les taux de réussite ont été comparés et la significativité des écarts testée pour mettre en évidence les éventuels progrès selon la structure mathématique des énoncés : problèmes additifs, soustractifs ou multiplicatifs. Dans cette étude, les résultats à l'épreuve initiale des élèves de classes de CM2 servaient de contrôle pour les résultats à l'épreuve finale des élèves de CM1. Les passations du pré-test ont eu lieu la même semaine du mois de janvier pour toutes les classes engagées dans l'étude (CM1 et CM2). Le pré-test au CM2 a ainsi été utilisé comme contrôle pour la comparaison avec les résultats au post-test des élèves de CM1.

Toutes les classes ont suivi un calendrier identique : la passation de l'épreuve initiale a eu lieu à la rentrée de janvier, celle de l'épreuve finale s'est tenue durant la semaine suivant la dernière séance. Les données recueillies sont celles des élèves ayant réalisé les épreuves initiale et finale dans leur totalité. Sur les 97 élèves de CM1 ayant effectué l'épreuve initiale, 16 ont été exclu·e·s car absent·e·s lors de la passation de l'épreuve finale. Les résultats de cette étude portent ainsi sur les réponses de 81 élèves de CM1 et 83 élèves de CM2. Un score de 1 a été attribué pour chaque bonne réponse à un *item*. Chaque élève a ainsi reçu un score sur 12 pour les énoncés additifs ou soustractifs et un score sur 10 pour les énoncés multiplicatifs.

Résultats et discussion

Le *tableau 2* présente les taux de réussite obtenus par les élèves du groupe expérimental aux épreuves initiale et finale après 10 séances d'apprentissage. Les résultats montrent un progrès significatif entre le pré-test et le post-test pour les trois structures arithmétiques des énoncés. Les tailles d'effet (*d* de Cohen) sont comprises entre 0,27 (problèmes additifs) et 0,75 (problèmes multiplicatifs) ce qui est considéré habituellement comme des effets intermédiaires voire forts. Ces résultats suggèrent que la séquence d'apprentissage AIR2 (composée de 10 séances) a des effets positifs sur la capacité des élèves à résoudre des énoncés arithmétiques à énoncés verbaux.

Tableau 1. Énoncés additifs, soustractifs et multiplicatifs des épreuves initiales et finales.

Énoncés de structure additive	Énoncés de structure soustractive	Énoncés de structure multiplicative
Dans mon jardin, il y a 246 fleurs blanches et 3 fleurs jaunes. Combien y a-t-il de fleurs dans mon jardin ?	Dans la vitrine du fleuriste, il y a 392 fleurs. Il en jette 5 qui sont fanées. Combien de fleurs reste-t-il dans la vitrine ?	Dans le placard de la classe, il y a 3 étuis de 75 stylos bleus. Combien y a-t-il de stylos bleus ?
Dans mon jardin, il y a 13 fleurs rouges et 279 fleurs bleues. Combien y a-t-il de fleurs dans mon jardin ?	Dans la vitrine du fleuriste, il y a 392 fleurs. Il en jette 13 qui sont fanées. Combien de fleurs reste-t-il dans la vitrine ?	Dans le placard de la classe, il y a 52 étuis de 4 stylos bleus. Combien y a-t-il de stylos bleus ?
À la récréation, Pierre a donné 4 billes à Léa. Il lui reste 295 billes. Combien Pierre avait-il de billes avant la récréation ?	Au départ du train ce matin, il y a 232 voyageurs. Des voyageurs montent dans le train tout au long du voyage. À l'arrivée, il y a 236 voyageurs dans le train. Combien de voyageurs sont montés au long du voyage ?	Mila a 125 cartes et des figurines. Elle a 3 fois plus de figurines que de cartes. Combien a-t-elle de figurines ?
À la récréation, Lou a donné 215 billes à Sam. Il lui reste 17 billes. Combien Lou avait-elle de billes avant la récréation ?	Au départ du train ce matin, il y a 38 voyageurs. Des voyageurs montent dans le train tout au long du voyage. À l'arrivée, il y a 236 voyageurs dans le train. Combien de voyageurs sont montés au long du voyage ?	Arto a 4 cartes et des figurines. Il a 31 fois plus de figurines que de cartes. Combien a-t-il de figurines ?
Jacques a 85 ans. Simone a 2 ans de plus que lui. Quel âge a-t-elle ?	Antoine a 92 ans. Flora a 4 ans de moins que lui. Quel âge a-t-elle ?	Fabio a 3 livres. Il échange chacun de ses livres contre 25 journaux. Combien a-t-il de journaux ?
Margot a 12 ans. Marcel a 79 ans de plus qu'elle. Quel âge a-t-il ?	Éliane a 73 ans. Noé a 12 ans de moins qu'elle. Quel âge a-t-il ?	Sabine a 51 livres. Elle échange chacun de ses livres contre 4 journaux. Combien a-t-elle de journaux ?
Léon a 98 ans et Félix a 3 ans. Quel âge ont-ils à eux deux ?	Nous avons besoin d'un stylo pour chacun des 168 élèves de l'école. Il y a 165 stylos. Combien manque-t-il de stylos ?	Arthur a 32 fleurs et des vases. Il a 4 fois plus de vases que de fleurs. Combien a-t-il de vases ?
Zoé a 9 ans et Cécile a 82 ans. Quel âge ont-elles à elles deux ?	Nous avons besoin d'un stylo pour chacun des 187 élèves de l'école. Il y a 4 stylos. Combien manque-t-il de stylos ?	Nina a 3 fleurs et des vases. Elle a 24 fois plus de vases que de fleurs. Combien a-t-elle de vases ?
Il y a 126 enfants mais il y a 4 pommes de plus que d'enfants. Combien y a-t-il de pommes ?	Aujourd'hui, le pâtissier a préparé 402 gâteaux. Noé a cueilli des fraises. Il y a 3 fraises de moins que de gâteaux. Combien y a-t-il de fraises ?	Cléo a 35 pommes et des paniers. Elle a 4 fois moins de pommes que de paniers. Combien a-t-elle de paniers ?
Il y a 9 enfants mais il y a 133 gâteaux de plus que d'enfants. Combien y a-t-il de gâteaux ?	Aujourd'hui, le pâtissier a préparé 308 gâteaux. Marie a cueilli des fraises. Il y a 12 fraises de moins que de gâteaux. Combien y a-t-il de fraises ?	Jules a 23 pommes et des paniers. Il a 7 fois moins de pommes que de paniers. Combien a-t-il de paniers ?
Sur la piste, mon pion est sur une case. Je recule de 4. Maintenant, mon pion est sur la case 368. Sur quelle case mon pion était-il avant de reculer ?	Sur la piste, mon pion est sur une case. J'avance de 2. Maintenant, mon pion est sur la case 291. Sur quelle case mon pion était-il avant d'avancer ?	
Sur la piste, mon pion est sur une case. Je recule de 12. Maintenant, mon pion est sur la case 294. Sur quelle case mon pion était-il avant de reculer ?	Sur la piste, mon pion est sur une case. J'avance de 11. Maintenant, mon pion est sur la case 207. Sur quelle case mon pion était-il avant d'avancer ?	

Tableau 2. Évolution des taux de réussite de 81 élèves de CM1 en résolution de problèmes arithmétiques avant et après apprentissage selon la structure mathématique de l'énoncé. * : $p < 0.05$ et ** : $p < 0.01$.

	Pré-Test	Post-Test	Test statistique
Structure arithmétique	Taux de réussite (Écart Type)		t
Addition	82.82% (1.73)	86.52% (1.58)	2.34*
Soustraction	78.81% (2.35)	84.67% (1.84)	3.02**
Multiplication	59.25% (2.73)	79.01% (2.16)	7.37**

Tableau 3. Comparaison des taux de réussite des élèves de CM1 à l'épreuve finale et des élèves de CM2 à l'épreuve initiale selon la structure arithmétique des énoncés

	Post-Test CM1	Pré-Test CM2	Test statistique
	N = 81	N = 83	
Structure arithmétique	Taux de réussite (Écart Type)		t
Addition	86.52% (1.58)	84.54% (2.03)	0.84
Soustraction	84.67% (1.84)	84.74% (2.27)	0.03
Multiplication	79.01% (2.16)	73.25% (2.23)	1.68

Pour étudier si l'amplitude de ces progrès est liée aux effets de la séquence d'apprentissage et non seulement aux progrès attendus après deux mois de scolarité, les performances des élèves de CM1 après apprentissage ont été comparées aux performances d'élèves de CM2 avant apprentissage. Le *tableau 3* présente la comparaison des taux de réussite et des scores moyens obtenus par les élèves de CM1 au post-test et les élèves de CM2 au prétest. Les résultats révèlent que les résultats des élèves de CM1 et de CM2 ne diffèrent significativement pour aucune des trois structures arithmétiques.

Afin de contrôler les effets bénéfiques de la séquence AIR2, les taux de réussite et des scores moyens obtenus par les élèves de CM1 et de CM2 au prétest ont été comparés de manière à s'assurer que les performances des élèves de CM1 et de CM2 différaient significativement avant apprentissage. Les résultats montrent que les performances des élèves de CM1 au pré-test dans la résolution de problèmes de structure additive ne sont pas significativement différentes de celles des élèves de CM2 ($t(162) = 0.7$). À l'inverse, les performances des élèves de CM1 au prétest dans la résolution de problèmes soustractifs ($t(162) = 1.97$*) et multiplicatifs ($t(162) = 3.69$**) sont significativement inférieures à celles des élèves de CM2 au prétest. Les différences observées pour les structures soustractives et multiplicatives s'expliquent aisément par le niveau de classe des élèves. En revanche, l'absence de différence significative pour les énoncés de structures additives peut s'expliquer par un calibrage du test insuffisamment discriminant, lié au fait que le concept d'addition est travaillé depuis le début de la scolarité élémentaire, ce qui n'est pas le cas pour la soustraction et la multiplication. Cependant, nous observons une progression significative des performances des élèves entre le pré- et le post-test, ce qui suggère un effet bénéfique de la séquence AIR2.

En conclusion, les résultats de cette étude corroborent en grande partie notre hypothèse générale. En effet, nous observons les effets bénéfiques sur les performances des élèves d'une progression pédagogique intégrant une fréquence contrôlée d'énoncés de problèmes discordants sur le plan des analogies intuitives de substitution, scénario et simulation. Ces résultats suggèrent que la conduite par les enseignants d'une séquence de 10 séances de résolution de problèmes intégrant des discordances de substitution, scénario et simulation à des fréquences contrôlées est suffisante chez les élèves de CM1 pour favoriser la maîtrise des concepts visés par les instructions officielles.

Ces premiers résultats soutiennent les prédictions auxquelles conduit le modèle SECO (*Semantic Congruence*), proposé par Gros, Thibaut et Sander (2020), qui intègre l'influence de la sémantique sur les représentations et les stratégies mises en œuvre. SECO défend l'idée que l'interprétation d'un énoncé varie en fonction des connaissances mathématiques et extra-mathématiques des élèves. Ce modèle place comme centrale sur le plan des apprentissages, l'activité de recodage sémantique, qui permet de surmonter une inadéquation entre la représentation première et celle adéquate pour engendrer une procédure menant à la solution. Dans SECO, la sémantique du monde, issue de l'expérience quotidienne, et la sémantique mathématique sont mises en correspondance et conduisent à une structure interprétée. De cette structure interprétée peut dériver une stratégie de résolution. En effet, un élève est susceptible de mobiliser des connaissances acquises dans des contextes divers, scolaires ou extra-scolaires et il est utile – parce qu'elles vont interférer avec les apprentissages nouveaux – de les prendre en compte pour guider les apprentissages et en comprendre les difficultés (Fischbein, 1987 ; Sander, 2016, 2017).

Enfin, cette étude présente deux limites principales liées à des contraintes institutionnelles et calendaires. La première est l'absence d'un groupe témoin de même degré scolaire qui aurait permis de mieux expliquer l'évolution des performances en résolution de problèmes en deux mois de scolarité. La seconde limite est de n'avoir pu intégrer dans la séquence les énoncés de division. En effet, alors que les opérations réciproques d'addition et de soustraction ont été travaillées conjointement, dans le champ multiplicatif, seule la multiplication a fait l'objet d'un apprentissage.

Dans la perspective de confirmer ces résultats prometteurs, il serait important de conduire une nouvelle étude selon une progression pédagogique élargie aux quatre opérations arithmétiques du CE1 au CM2 et au CP pour l'addition et la soustraction. Par ailleurs, il serait pertinent d'une part d'étudier l'impact de la formation sur les pratiques enseignantes, d'autre part d'évaluer l'implémentation (Gentaz & Richard, 2022) de la séquence AIR2 dans les classes à une échelle conséquente et sur plusieurs années dans une perspective longitudinale.

RÉFÉRENCES

Bassok, M., Chase, V., & Martin, S. (1998). Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology, 35*, 99-134.

Brissiaud, R., & Sander. E. (2010). Arithmetic word problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science, 13*, 92-101.

Cohen, J. (1988). *The effect size index: d. Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Abingdon-on-Thames: Routledge Academic.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Reider: Dordrecht.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics, 9*, 9-14.

Fischbein, E. (1994). Tacit models. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (pp. 97-109). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., & Richard, J.-F. (2018). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal a of Psychology of Education, 34*(2), 439-456.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie française, 59*(3), 215-229.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J. F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction, 20*(5), 400-410.

Gentaz, É. & Richard, S. (2022). *Efficacité des interventions conduites dans les classes : la nécessité de l'évaluation de leur implémentation*. Paris : Cnesco-Cnam.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan Publishing Company.

Gros, H., Sander, E., & Thibaut, J.-P. (2019). When masters of abstraction run into a concrete wall: Experts falling arithmetic word problems. *Psychonomic Bulletin & Review, 26*, 1738-1746.

Gros, H., Thibaut, J.-P., & Sander, E. (2021). What we count dictates how we count: a tale of two encodings. *Cognition, 212*. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2021.104665

Gros, H., Thibaut, J.-P., & Sander, E. (2017). *The nature of quantities influences the representation of arithmetic problems: evidence from drawings and solving procedures in children and adults.* Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Cognitive Science. London, UK: Cognitive Science Society.

Gros, H., Thibaut, J.-P., & Sander, E. (2020). Semantic congruence in arithmetic: A new conceptual model for word problem solving. *Educational Psychologist, 55*, 69-87.

Gvozdic, K., & Sander, E. (2020). Learning to be an opportunistic word problem solver: going beyond informal solving strategies. *ZDM Mathematics Education, 52*, 111-123.

Holyoak, K.J., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge: MIT Press.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Riley, M., Greeno, J., & Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. Ginsberg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Rivier, C., Scheibling-Sève, C., & Sander, E. (en révision). Étude des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 selon un cadre de concordance-discordance par rapport à trois formes d'analogies. *Revue Française de Pédagogie*.

Sander, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages. *Bulletin de psychologie, 60*, 119-124.

Sander, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (Eds), *Les connaissances naïves* (pp. 57-102). Paris : Armand Colin.

Sander, E. (2016). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arithmétiques. *Bulletin de Psychologie, 546(6)*, 463-469.

Sander, E. (2017). Les connaissances issues de la vie quotidienne et les apprentissages scolaires. In R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux & E. Sander (Eds), *Psychologie du développement* (pp. 217-225). Paris : Elsevier Masson.

Sander, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3. In J. Pilet et C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (pp. 122-141). Paris, France.

Sander, E., Rivier, C., & Naud, S. (2022) Résoudre des problèmes pour construire le sens des opérations au-delà des conceptions intuitives : quels énoncés pour quelles progressions d'apprentissage ? In *Actes du 47e Colloque de la COPIRELEM* (pp. 327-344). Grenoble, ARPEME.

Sander, E., Neagoy, M., Rivier, C., Scheibling-Sève, C., Sensevy, G., & Thevenot, C. (2022). *De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique.* Synthèse de la recherche et recommandations. Paris : MEN-CSEN.

Scheibling-Sève, C., Pasquinelli, E., & Sander, E. (2020). Assessing conceptual knowledge through solving arithmetic word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 103, 293-311.

Schliemann, A.D, Araujo, C., Cassunde, M.A., Macedo, S., & Niceas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal of Research in Mathematics Education, 29*, 422-435.

Tirosh, D., & Graeber, A. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teacher's thinking about division. *School Science of Mathematics, 91*, 157-163.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and substraction: a cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In H. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale: Erlbaum.

Vilette, B, Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., & Richard, J.-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue Française de Pédagogie, 201*, 105-120.